Fields Medalists 2010

1. Elon Lindenstrauss (Hebrew Univ. / Princeton Univ.)

에르고딕 이론과 정수론 간의 상호 작용

에르고딕 이론은 동역학계(dynamical system)가 시간이 지남에 따라 어떻게 변하는지에 대한 이론이다. 거의 모든 점은 주어진 임의의 집합으로 결국 돌아온다는 회귀(recurrence) 성질, 주어진 임의의 함수의 시간에 대한 평균이 공간에 대한 평균으로 근접한다는 에르고딕 성질, 그리고 임의의 두 집합에 대해 한 집합이 다른 집합과 만나는 비율은 두 집합의 측도(measure)의 곱으로 나타난다는 mixing 성질 등과, 이들의 극한에의 근접 속도 등에 대한 연구가 중심이 된다.

때로는 이러한 ergodicity나 mixing등의 성질이 전혀 관련이 없어 보이는 다른 분야의 문제들을 해결하는데 결정적인 단서가 된다. 에르고딕 이론과 정수론과의 연관성은 Weyl이 정수론을 천체역학 및 perturbation 이론에 응용한 1914년으로 거슬러 올라가나, 에르고딕 이론 중 특히 리군 G와 그 부분군 H의 G의 몫공간 G/Γ에의 작용을 연구하는 homogeneous dynamics를 이용하여 정수론의 여러 문제들[1]을 해결하게 되면서 많은 이들의 주목을 받게 되었다.

린덴스트라우스(Elon Lindenstrauss)는 이러한 연관성을 이용하여 정수론의 여러 문제들, 그리고 quantum chaos라 불리는 동력학계의 unique ergodicity 추측의 해결을 향한 큰 발걸음을 내딛었다. 린덴스트라우스가 에르고딕 이론을 이용하여 (부분적으로) 해결한 대표적인 정수론 문제인 Littlewood 추측과 quantum unique ergodicity 추측에 대해 살펴보자.

디오판틴 근사(Diophantine approximation) : Littlewood 추측

일반적으로 디오판틴 근사는 실수해를 가지는 주어진 등식 혹은 부등식이 정수해를 가지는가 하는 문제이다. 린덴스트라우스가 Einsiedler, Katok과 함께 해결의 전환점을 찾은 Littlewood 추측은 모든 실수 α에 대해 α에 가장 가까운 정수점과의 거리를 $\|\alpha\|$라 하면, 모든 실수 α, β에 대해 $\liminf_{n\to\infty} n\|n\cdot\alpha\|\|n\cdot\beta\|=0$가 성립할 것이라는 추측이다. Dirichlet 근사정리 ($\|n\cdot\alpha\|=O(1/n)$)의 일반화로 얼핏 쉬운 문제로 보일 수 있으나 80년간 해결되지 않으며 악명 높은 문제로 남아왔다. 린덴스트라우스는 $G/\Gamma=SL_3(R)/SL_3(Z)$에 작용하는 대각 반군(semigroup)의 궤도가 유계가 아님을 이용하여, Littlewood 추측이 성립하지 않는 점들의 Hausdorff 차원이 0이 됨을 보였다([1]). 이는 측도가 0이라는 것보다 훨씬 강한 조건이다.

1) Minkowski의 수의 기하학이나 디오판틴 근사, 예를 들어 Margulis가 증명한 Oppenheim 추측 (부정형 무리 이차 형식(indefinite irrational quadratic form)의 정수값이 임의의 작은 수를 근사할 수 있을 것이라는 추측) 등이 있다.

Arithmetic quantum unique ergodicity

1991년 Rudnick과 Sarnak은 modular domain과 같은 특정한 상황에서는 일반적인 chaotic billards에서 나타나는 strong scar라 불리는 현상(심하게 흥분된(excited) 양자 입자들이 고전적인 입자의 주기적인 경로(periodic trajectories)들에 집중되는 현상)이 일어나지 않음을 발견하고 이에 기초해 충분히 혼돈된 계(chaotic system)에서는 strong scar가 일어나지 않을 것이라는 quantum unique ergodicity(QUE) 추측을 제시하였다([2]). QUE 추측은 수학의 다른 분야들과 밀접한 관련이 있는데, QUE 추측의 기반이 된 modular domain의 경우 QUE는 일반 리만 가설에 의해 함의되며 한편 Rudnick은 holomorhic Eisenstein series가 다른 moular form들과는 달리 해들이 weight에 대해 고르게 분포됨(equidistribution)을 함의함을 보였다. 린덴스트라우스는 Laplacian의 고유함수들의 특정 성질을 규명함으로써 compact arithmetic surfaces에 대해 QUE를 해결하였다([3]). 린덴스트라우스의 결과 이후, Anantharaman([4]), Holowinsky와 Soundararajan([5]for holomorphic analog)의 결과 등이 있으나, QUE는 일반적인 경우 여전히 미해결 문제로 남아 우리의 도전을 기다리고 있다.

린덴스트라우스의 업적들은 강력하고 아름다우며 린덴스트라우스는 앞으로도 왕성한 연구를 할 것으로 기대된다.

[참고 문헌]

[1] M. Einsiedler, A. Katok, E. Lindenstrauss, Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture, Ann. of Math. (2) 164 (2006), no. 2, 513-560.

[2] Z. Rudnick and P. Sarnak, The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds, Comm. Math. Phys. 161 (1994), 195-213.

[3] E. Lindenstrauss, Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity, Ann. of Math. (2) 163 (2006), no. 1, 165-219.

[4] N. Anantharaman, Entropy and the localization of eigenfunctions, Ann. of Math. (2) 168 (2008), no. 2, 435-475.

[5] R. Holowinsky, K. Soundararajan, Mass equidistribution for Hecke eigenforms, Ann. of Math. (2), 172 (2010), no. 2, 1517-1528.

서울대학교 수리과학부 임선희

2. Ngô Bảo Châu (Univ. Paris-Sud / Inst. for Advanced Study / Univ. of Chicago)

1. Langlands reciprocity

정수방정식의 공부는 수학에서 역사가 가장 깊은 분야 중에 하나이다. Fermat의 마지막정리에 나오는 방정식

$$x^n + y^n = z^n$$

처럼, 간단하게 분석할 수 있어야 할 것 같으면서도 수백 년, 때로는 수천 년에 걸쳐서 수학자들을 애먹일 수 있는 것이 바로 정수방정식이다.

정수방정식 X에 관한 중요한 정보가 'L-function'이라 부르는 복소변수 함수 $L(X, s)$ [2]속에 숨어있다는 철학은 이제 수학자들 사이에 비교적 잘 알려져 있는 것 같다. 타원곡선 방정식

$E: y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b$는 정수, $4a^3 + 27b^2 \neq 0)$

의 경우가 가장 유명할 것이다. 그때는 E와 관련된 대부분의 중요한 정보가 $L(E, s)$의 $s=1$에서의 값과 관련 있다는 것이 'Birch-Swinnerton-Dyer (BSD)' 가설의 핵심이다. 가령 E의 유리해가 무한하게 되는 현상이 $L(E, 1) = 0$과 동치관계라는 주장도 거기에 포함돼있다. 지금에 와서는 BSD 가설이 Deligne 가설, Beilinson 가설, Bloch-Kato 가설 등으로 일반화되어 1980년대 이후로는 이와 관련된 문제들이 수론의 굉장히 활발한 분야를 이루고 있다. 그러나 이런 가설들은 하나같이 $L(X, s)$의 자연스런 해석적인 성질을 필요로 한다는 기묘한 공통점을 가지고 있다. $L(X, s)$는 보통 유한체 F_{p^n} 안에서 방정식의 해의 개수를 세어서 만든 함수 $L_p(X, s)$를 소수 p 하나하나에 대해서 정의한 다음에 그것들의 무한 곱

$$L(X, s) = \prod_p L_p(X, s)$$

으로 정의하는 함수이기 때문에 좋은 성질을 기대하기 어려울 텐데도, 이 모든 가설들은 $L(X, s)$가 entire function(혹은 meromorphic function)으로 확장된다고 가정하고 시작한다. 가령 타원곡선 E의 경우에 $L(E, s)$는 Re(s)가 3/2보다 큰 영역에서만 수렴하는데도 $L(E, s)$의 1에서의 값에 관한 BSD 예상은 1960년대부터 많은 수학자에 의해서 열렬히 연구되어 왔다. (물론 한동안은 analytic continuation이 알려진 특별한 경우들에 연구가 집중됐었다.) 그러던 중 결국 $L(E, s)$가 일반적으로도 entire function이 된다는 사실이 Wiles, 그리고 Breuil-Conrad-Diamond-Taylor에 의해서 90년대 중후반에야 증명된 것이다. 이런 기이한 상황에도 불구하고 L-function들이 entire function이 되어야 한다는 믿음은 정수론자들 사이에서 대단히 확고히 자리잡고 있으며, 그런 신념의 체계적인 표현을 보통 'Hasse-Weil conjecture'라고 일컫는다.

방정식의 L-function과 비슷한 꼴의 L-function이 나타나는 또 하나의 중요한 마당이 automorphic form, 혹은 automorphic representation 이론이다. 그 경우에 주어지는 정보는 정수방정식이 아니고 reductive algebraic group G (예를 들자면 GL_n, Sp_n, SO_n, U_n), G의 adelic point로 이루어진 topological group $G(A)$, 그 안에 discrete subgroup으로 살고 있는 유리수 점들의 group $G(Q)$ [3], 그리고 Hilbert 공간[4]

$$L^2(G(Q) \setminus G(A))$$

에 $G(A)$가 right translation으로 작용할 때 그 안에 나타나는 irreducible representation π이다. 이런 π를 'automorphic representation' 이라 부른다[5].

Automorphic representation π에다가 Langlands 이론에서는 또 다시 복소변수 함수 $L(\pi, s)$를 대응시키고 그 역시 entire function이 되리라 예상하고 있다. 간단한 예로 G가 GL_2인 경우에 대부분의 π는 Hecke algebra의 eigenvector가 되는 holomorphic modular form f에 대응시킬 수 있다. 그 때 p번째 Hecke operator T_p의 eigenvalue를 a_p라 하면, 대부분

2) 여기 쓰이는 글자 L의 기원은 잘 모르겠다. Langlands와는 무관하다.

3) Adele같은 구조에 익숙하지 않은 사람은 $G(A)$ 대신에 real group $G(R)$, 그리고 $G(Q)$ 대신에 arithmetic group $G(Z) \subset G(R)$에 대해서 생각해도 무방하다.

4) 여기서 G의 center가 non-trivial split torus를 가지면 약간의 수정이 필요하다.

5) 고전적인 의미의 automorphic form은 π같은 표현 공간 안에 사는 특수함수들인데 많은 경우에 전체 공간 π를 결정해버리는 효과를 가지고 있기 때문에 전문가들은 automorphic representation과 automorphic form 두 단어를 고의적으로 혼동해서 쓰기도 한다.

소수 p에 대해서

$$L_p(f,s)=1/(1-a_p p^{-s}+p^{1-2s})$$

로 정의하고, $L(f,s)$는 이번에도

$$L(f,s)=\prod_p L_p(f,s)$$

같은 무한 곱으로 정의한다. 그러나 이 경우에는 이 복잡한 L-function을 표현하는 편리한 방법이 여럿이기 때문에 그의 해석적인 성질도 쉽게 분석할 수 있다. 가령

$$(2\pi)^s\Gamma(s)L(f,s)=\int_0^\infty f(it)t^{s-1}dt$$

꼴의 Mellin transform 표현은 금방 analytic continuation을 유도한다. 이런 유형을 따라서 일반적으로도 정의하는 automorphic L-function[6)]

$$L(\pi,s)$$

는 항상 entire function이 되고 그 사실의 증명 역시 topological group상의 조화 해석을 통해서 자연스럽게 이루어져야 한다는 것이 Langlands 철학의 기본적인 신념 중에 하나이다.

그런 반면 Langlands program의 주춧돌인 'reciprocity conjecture'는 Hasse-Weil conjecture의 증명을 주목적으로 한다고 볼 수 있는데, 그 방법론으로써

$$L(X,s)=L(\pi_1,s)^{\pm1}L(\pi_2,s)^{\pm1}...L(\pi_m,s)^{\pm1}$$

꼴의 등식을 예상하고 있다. 즉, 방정식의 L-function이 항상 automorphic L-function으로 나타내지고, $L(X,s)$들의 analytic continuation은 그런 표현의 부수정리로 증명돼야 한다는 파격적인 주장이다.

Reciprocity conjecture가 증명된 경우는 아직도 많지 않은 편인데 X가 Shimura variety를 표현하는 방정식일 때가 가장 체계적으로 연구되어 있고[7)], Shimura variety와 직접적인 관련이 없는 방향으로 가장 유명한 결과는 역시 타원곡선의 L-function이 modular form의 L-function과 같아진다는 내용의 Wiles정리일 것이다. 중요한 점은 지금까지[8)] 방정식의 L-function의 analytic continuation이 증명된 경우가 전부 다 암시적으로라도 automorphic L-function과의 등식을 사용했었다는 사실이고 이런 고찰이 Langlands작전의 원동력이 된다는 것이다.

II. Langlands functoriality

앞에서 설명했듯이 Langlands의 reciprocity conjecture는 방정식을 공부하는 어려운 문제의 일부를 topological group상의 조화해석 문제로 바꿀 수 있어야한다는 주장이다[9)]. 그러나 이 방법론에서 일어나는 군들, 또 그 상에 사는 automorphic form들 사이에도 난이도 차이가 상당히 있다. 예를 들자면 원칙상 쉬워야할 $L(\pi,s)$의 analytic continuation도 군 G의 구조에 따라서 증명되지 않은 경우가 많다. $L(\pi,s)$의 해석학은 구조가 간단한 GL_n의 경우에는 원할만한 성질이 전부 증명된 상태지만, 일반적인 automorphic L-function은 아직도 굉장히 많은 어려움을 제시한다. 이 상황을 수습하는 작업에 있어서 여러 다른 군상의 automorphic form들 사이에도 긴밀한 관계를 지어줄 수 있다는 사실이 큰 도움을 준다. 고전적으로 알려진 예 중에는 Saito-Kurokawa lifting 같은 현상이 대표적이다. 이때는 weight $2k-2$인 holomorphic modular form f에다가 Siegel modular form F_f를 대응시켜서

6) 정확히 기술하자면 약간의 입력을 더 필요로 한다. $L(\pi,s)$를 정의하기 위해서는 소위 Langlands dual group의 algebraic representation 하나를 정해 주어야 한다. Langlands dual group은 주어진 이론에서 굉장히 중요한 개념이지만 이 글에서는 그에 대한 상세한 기술을 피하기로 한다.

7) Shimura variety는 이미 reductive group을 이용해서 만들었기에 방정식의 L-function과 automorphic L-function의 관계를 찾기가 비교적 쉽다. 그러나 여기서 조금 모호할 수도 있는 '비교적'이란 단어는 상당히 심각하게 받아들여야 한다.

8) Langlands가설이 나오기 전의 증명도 포함한다.

9) 그러면서도 Langlands 자신은 reciprocity conjecture가 방정식의 L-function이론의 시작점일 뿐이라는 사실을 가끔 강조한다.

$$L(f,s)=\zeta(s-k+1)\zeta(s-k+2)L(F_{f},s)$$

라는 등식을 유용하게 사용한다.

이런 종류의 L-function 사이의 관계를 포괄적으로 설명하고자 하는 원리가 Langlands의 'functoriality' 가설이다. 이 깊고 넓은 가설을 짧은 지면상에 서술하기 어렵지만, 그의 특별한 경우 중에 Jacquet-Langlands correspondence, Wiles의 정리에서 사용된 cyclic base-change 같은 유명한 결과들도 들어있고 현재 토론토 대학에서 활약하는 Henry Kim 교수가 증명한 GL_2 automorphic L-function을 GL_4와 GL_5 L-function으로 가지고 가는 symmetric power lifting도 포함된다는 사실을 주시할 만하다.

Functoriality 가설로부터 끄어낼 수 있는 명제 중에서 가장 중요한 것은 어쩌면

> 임의의 automorphic L-function을 GL_n 상의 automorphic L-function으로 표시할 수 있다

는 예상이 아닌가 싶다. 이 가설에는 일반적인 automorphic L-function의 해석적 성질을 GL_n automorphic form의 L-function의 성질로부터 유도해야 한다는 일종의 권장사항도 들어있다. GL_n 상의 automorphic L-function을 편의상 standard L-function이라 지칭하기도 하는데 Langlands는 1978년 헬싱키 ICM 강연에서 reciprocity conjecture와 functoriality conjecture를 합쳐서 다음과 같이 요약한 적이 있다:

> ...all evidence indicates that there are fewer L-functions than the definitions suggest, and that every L-function, motivic[10] or automorphic, is equal to a standard L-function.

복잡한 여러 정리와 가설을 기억하기가 귀찮은 독자는 Langlands program의 핵심을 위 구절 하나로 기억하면 편리할 것이다.

III. 응오(Ngô Bảo Châu)의 업적

60년대 이후로 functoriality 원리의 여러 특별 사례가 증명된 복잡한 역사에 대해서 거의 언급하지 못했지만 현 상황으로 진전해서 응오의 업적에 관해서 몇 마디 하고자 한다.

Functoriality를 증명하는데 사용되는 가장 기본적인 도구는 소위 Arthur-Selberg trace formula 라고 하는 정리인데 이는 Poisson summation formula의 방대한 일반화로 생각할 수 있다. Arthur-Selberg 공식은 $L^2(G(Q)G(A))$에 작용하는 적당한 함수 작용소, 즉 compact support 함수 h가 작용할 때의 trace

$$\mathrm{Tr}[h|L^2(G(Q)\setminus G(A))]$$

를 $G(A)$상의 적분을 가지고 표현하는데[11] 그런 적분의 가장 중요한 요소가 바로 p-adic group $G(Q_p)$상의 orbital integral이다[12]. Trace formula의 정확한 꼴은 여기서 다루지 않겠지만 orbital integral의 모양은 한번쯤 들여다봐도 좋을 것이다:

$$O_g(f_p,dt)=\int_{G_g(Q_p)\setminus G(Q_p)} f_p(x^{-1}gx)dx$$

여기서 O_g는 한 원소 g에 주어지는 $G(Q_p)$의 conjugation action을 따라서 취한 orbit을 지칭하고 G_g는 원소 g의 centralizer를 말한다. Arthur-Selberg trace 공식이 서로 다른 군상의 automorphic representation들을 비교하는데 도움을 주는 근본적인 이유는 compact Lie group의 character theory와도 유사하다고 할 수 있다. 그때는 물론 군을 고정시킨 다음 원소의 trace를 가지고 representation들을 비교하곤 한다. 여기서의 상황은 군을 바꾸어 나가는 과정이 주요점이기 때문에 더 절묘한 비교법을 필요로 하지만 궁극적으로는 공식의 오른쪽에[13] 나오는 적분들을 서로 다른 군상에서 계산/비교함으로서 두 군상의

---

10) 여기서 motivic L-function은 I절에서 다룬 예처럼 방정식에 대응되는 L-function을 말한다.

11) 사실은 관심의 대상이 되는 작용소들은 대부분 trace class가 아니기 때문에 정확한 서술은 상당히 복잡하다.

12) 여기에 모든 소수 p가 기여하는 바가 있고 Q보다 큰 algebraic number field로부터 시작할 때는 다른 local field 들이 등장한다.

automorphic representation들의 공통된 부분을 찾고자 하는 것이다. 여기서 상기할 중요한 점은 reductive group G의 구조가 maximal torus T에 주어진 정보에 의해서 결정된다는 Lie 이론의 사실이다[14]. 가령 G의 모든 conjugacy class들은 근본적으로 T/W 꼴의 공간과 대응관계가 있다 (여기서 W는 Weyl group을 뜻한다). 따라서 G와 G'의 두 trace formula를 비교할 때 T/W와 T'/W' 사이의 적당한 관계를 이용하는 것이 자연스럽다. 그런데 여기서 의외로 까다로운 점이 대두된다. 정확히 서술하자면 T/W가 일반적으로 conjugacy class들과 대응관계가 있는 것이 아니라, stable conjugacy class, 즉 Q_p의 algebraic closure를 취해준 $\overline{Q_p}$상의 conjugacy class 들과 대응된다는 사실 때문이다. 그래서 trace formula 역시 conjugacy class 위의 적분이 아니라 stable conjugacy class를 따라서 적분한 꼴로 표현하는 것이 좋을 것이라는 결론에 곧 다다른다. Trace formula의 geometric side를 stable conjugacy 상의 적분을 써서 다시 표현하는데 필요한 조건들을 Langlands는 1979년 파리강의록에서 종합적으로 서술했는데 그중에서 가장 어려운 부분이 바로 응오가 증명한 '기초 보조정리(fundamental lemma)'인 것 이다. 이름이 보여 주듯이 본래 착상으로는 필요한 공식이 머지않아 증명될 쉬운 사실일 것으로 예상했지만, 완전한 증명은 결국 근 30년에 걸쳐 수많은 수학자들의 노력을 기다려야 했다.

이제 응오의 논문에서 직접인용 해보자:
q개의 원소를 가진 체를 k라 놓고, O는 k를 residue field로 갖는 discrete valuation ring이라 하자. G는 O 위에 사는 reductive group scheme으로서 Coxeter number가 char$(k)/2$보다 작다고 가정하자. (κ, ρ)가 endoscopic data로 주어졌을 때 그에 딸린 endoscopic group scheme을 H라 놓자. 그때 다음과 같이 orbital integral과 stable orbital integral 사이에 등식이 성립한다:

$$\Delta_{G(a)} O^{k_a}(1_g, dt) = \Delta_H(a_H)\, SO_{a_h}(1_h, dt).$$

이 등식에 나오는 기호들을 더 이상 설명하지 않는 점을 독자는 양해주길 바란다. 단지 등식의 어려움을 짐작하기 위해서 G상의 orbital integral이 소위 'endoscopic group'이라 (Langlands가) 작명한 전혀 다른 group H상의 stable orbital integral을 이용해서 표현된다는 점은 강조할 만하다. 결국은 G와 G'상의 automorphic form들을 비교하고 싶지만 그 과정에서 이미 많은 '보조군'들(즉, G와 G'의 endoscopic group들)의 역할이 결정적이라는 뜻이다. 한 가지 조심할 점은 이 명제가 기초 보조정리 그 자체는 아니고 기초 보조정리의 변형으로서 이 명제가 원래의 기초 보조정리를 함축한다는 사실 또한 증명을 요하는데, 이는 Hales와 Waldspurger에 의해 해결되어 있었다[15]. 기초 보조정리를 공략하던 초반의 관점은 그것이 p-adic 군 $G(Q_p), H(Q_p)$ 상의 조합론적 등식이란 것이었고, 따라서 군론, 조화해석, 조합론적 사고를 통해 해결하려는 시도가 많았다. 이를 통해 몇몇 특수한 경우들에서 증명을 해내긴 하였으나 일반적인 경우의 증명은 요원한 상태였다. 그러던 중 2004년에 응오와 그의 지도교수 Laumon이 unitary group의 기초 보조정리를 대수기하의 강력한 도구들을 이용해 해결하면서 혁신적인 방향을 제시하였고, 응오는 이를 더욱 발전시켜 완전한 증명을 얻어낸 것이다. 이후 유사한 테크닉으로 Laumon은 Chaudouard와 함께 weighted fundamental lemma라는 더 일반적인 정리를 증명했기 때문에 Langlands가 오랜 기간

13) 오른쪽에 나오는 복잡한 orbital integral들의 합을 흔히 trace formula의 'geometric side'라 부른다.

14) Automorphic form의 공부는 특별한 경우 몇 가지만으로도 충분히 일생을 채울 수 있다. 그렇지만 functoriality 원리의 거시적인 이해는 algebraic group의 기초 구조론을 철저히 습득하지 않으면 불가능하다.

15) 이와 관련된 결과 중 한 줄기는 수리논리에 입각한 원칙을 이용해서도 얻어낼 수 있음을 Cluckers와 Loeser가 증명하였다.

강조해오던 stable trace formula에 필요한 도구가 전부 정비되었다고 볼 수 있다. 어떻게 기초 보조정리에 대수기하가 개입할 여지가 생겼는지는 뒤에서 조금 더 설명하기로 한다.

기초 보조정리에 endoscopic group들이 등장하는 현상의 자연스런 산물 또 하나는 Langlands functoriality의 중요한 경우인 endoscopy 혹은 endoscopic transfer 가설이다. 그것은 위와 같이 G의 endoscopic group H가 주어지면 H자체의 automorphic representation π_H 하나마다 G의 automorphic representation π_G가 대응돼서[16] L-function 사이의 등식

$$L(\pi_H, s) = L(\pi_G, s)$$

이 성립한다는 주장이다. 그러니까 G상의 automorphic form들을 이해는 데 있어서 여러 보조군들이 사용되지만 거꾸로 관심 있는 군 H를 더 쉬운 군 G의 endoscopic group으로 표현할 수 있을 때마다 H상의 automorphic form에 대한 새로운 정보를 얻을 수 있다는 것이다. 깊이 있는 수학공식은 양방향으로 거듭 응용 되면서 복잡한 상호작용을 초래하게 되는 흔한 기현상을 기초 보조정리는 다시금 예증해준다고 할 수 있다.

지금까지 증명된 functoriality의 많은 사례들을 endoscopy 가설은 굉장히 포괄적으로 포함하고 있다. 앞에서 언급한 Jacquet-Langlands correspondence도 endoscopy의 특별한 경우고, Langlands의 cyclic base-change 정리도 endoscopy의 한 사례다. Wiles의 정리가 Langlands reciprocity의 특별한 경우인 것을 이미 지적했지만, 증명과정에서 결정적으로 사용된 Langlands의 cyclic base-change가 endoscopy의 아주 특수한 예라는 사실로부터도 응오 정리의 깊이와 중요성을 짐작할 수 있을 것이다. 최근 들어서는 endoscopy의 또 한 경우인 unitary group과 GL_n 사이의 functoriality를 이용해서 신석우[17], Sophie Morel 등이 reciprocity conjecture의 사례를 여러 개 만들어냈는데 그들의 결과는 Skinner와 Urban의 GL_2 Iwasawa 이론에 적용되어 BSD conjecture의 큰 진전을 이끌어 내기도 했다. 이런 종류의 연구는 functoriality 원리의 전형적인 강점을 보여준다고 할 수 있다. 이 저자들은

unitary group의 automorphic L-function = standard L-function

꼴의 등식을 거듭 이용하는데 그로 인해서 좌측의 긴밀한 대수기하학적 성질과 우측의 수월한 해석학을 절묘하게 합성하는 효과가 나타난다[18].

이런 결과들 외에도 80년대 이후로 기초 보조정리를 가정하고 시작한 조건부 정리들이 많이 있기 때문에 응오의 업적은 그 파급효과가 대단하다. 그렇지만 여기서도 조심할 점은 아직까지도 기초 보조정리의 모든 부대결과가 선명하게 기술된 상태는 아니라는 것이다. Functoriality 증명의 핵심 도구인 stable trace formula는 기초 보조정리가 맞다는 가정 아래 Langlands, Kottwitz, Arthur에 의해 전개되었기 때문에 응오의 증명으로 인해 그 사용이 가능해졌지만 그것을 응용하는 작업은 아직도 진행 중이다. 어쩌면 기초 보조정리의 가장 폭넓은 산물일 수도 있는 classical group에서 GL_n으로 가는 functoriality 역시 현재 쓰여 지고 있는 Arthur의 책에 완전한 증명이 기술될 것이라고 기대하고 있다. 이렇듯 사연은 복잡하지만 중요한 수학 결과는 한 방향 연구의 끝을 내는 순간에 비해서도 앞으로의 연구를 활성화 하는 미래 지향성이 보다 큰 의미를 갖기 때문에 응오의 결과가 현 상황에서 더욱 값지지 않은가 싶다.

16) 일반적으로는 소위 'L-packet' 사이의 대응관계를 이야기해야 정확하다.

17) 둘째 저자가 자신의 업적을 언급하기 민망해 했지만 첫째저자의 판단으로 과학적인 객관성에 입각하여 이 결과를 거론하기로 했다.

18) 주 차이는 unitary group이 Shimura variety를 locally symmetric space로 가지고 있지만 GL_n은 $n \geq 3$일 때 locally symmetric space가 대수다양체일 수 없다는 사실이다. 그런 반면 GL_n은 조화해석이 가장 쉬운 군임을 이미 지적한바 있다.

Langlands 자신은 일반적인 functoriality에 대해서 다시금 생각할 수 있는 정신적 여유를 응오의 업적으로부터 얻어냈다고 기뻐하고 있으며, 최근에는 beyond endoscopy라는 구호 아래 endoscopy에 해당하지 않는 functoriality의 일반적인 경우들을 증명하는 방법을 고안하고 있다.

어쩌면 결과 그 자체 이상으로 관심을 끄는 요소는 응오의 증명이 물리학의 양자장론에 근원하는 아름다운 기하학적인 구조를 결정적으로 사용하고 있다는 놀라운 사실이다. algebraic curve 상의 principal bundle의 moduli space의 cotangent bundle에 사는 미분방정식인 Hitchin system이 물리학자와 기하학자들에 의해서 연구되던 중 응오는 그런 구조가 finite field 위에 정의된 경우에 Hitchin system의 integral curve상의 점의 개수를 세는 문제가 바로 orbital integral을 계산하는 문제와 동일하다는 사실을 발견했다. 이 혁신적인 관점은 orbital integral을 완전히 거시적 산술기하의 방법론, 즉 etale cohomology와 perverse sheaf 이론을 사용해서 계산할 수 있게 만들었다. Hitchin system은 4차원 Yang-Mills 이론으로부터 reduction에 의해서 일어나기 때문에 이런 많은 구성요소들의 성공적인 배합이 학문의 통일성을 재증명하는 현상이라고 보는 시각도 적지 않다. Hitchin system은 Beilinson과 Drinfeld가 창조한 geometric Langlands correspondence에서도 mirror symmetry 이론에 근원한 중요한 역할을 하는데 이런 수리 물리적 구조의 산술적인 본성에 대한 섬세한 질문이 정수론의 중요한 연구대상으로 머지않아 대두될 것으로 보여 진다.

위에 서술한 요약은 기초 보조정리의 깊은 중요성을 강조하면서도 그 결과의 잠정적인 실태 또한 이야기하지 않을 수가 없었다. 심오하고 광범위한 Langlands program 자체의 결말은 앞으로도 수십 년, 혹은 수백 년, 또는 수학의 발전 역사에서 가끔 찾을 수 있는 수천 년의 과업이 되어버릴 수도 있기 때문이다[19]. 그러나 현재는 세계 수론공동체가 지난 삼십여 년 동안의 여러 뛰어난 수학자들의 노력을 일단락 짓는 응오의 업적에 대해서 크나큰 경의를 표시하고 있다.

UCL, 포항공과대학교 수학과 김민형

IAS, MIT 수학과 신석우

3. Stanislav Smirnov (Univ. de Genève)

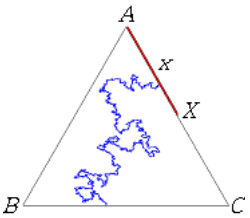
통계물리의 여러 평면 격자 모델들의 인터페이스는 척도 극한을 가지며, 이 극한이 등각 불변임이 증명 또는 예측되어 왔다. 스타니슬라프 스미르노프(Stanislav Smirnov)는 삼투(percolation) 모델([1]), Ising 모델([2])의 경우에 이를 증명한 공로를 인정받아 2010년 필즈상을 수상하였다. 증명의 주된 도구는 Schramm-Loewner evolution (SLE)이다. 앞서 Werner는 Lawler, Schramm과

19) 그 기간 동안 수많은 변환과 진화를 겪을 것이 분명하고 수백 년 동안 잊혀 졌다가 재발견되는 비극-낭만적인 상황도 상상해보면 재미있다.

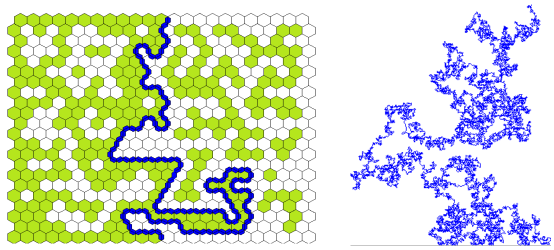
더불어 SLE를 이용하여 만델브로 예측([3], 평면 브라운 운동의 바깥 경계의 프랙탈 차원이 4/3임) 등을 증명한 공로로 2006년 필즈상을 수상한 바 있다.

삼투 모델 : 정육각형 격자구조를 가지는 벌집으로 이루어진 (평면 내의) 영역을 고려하고, 영역 내 각 격자가 비워져 있을 사건이 독립이며 확률 p로 주어진다고 하자. 물은 비워져 있는 격자만 통과할 수 있다고 할 때, p가 작을수록 물길은 줄어들고 p가 클수록 물길은 늘어난다. 이 모델은 임계확률 1/2에서 상전이(무한 물길의 존재성 여부)가 일어난다는 사실이 알려져 있다. 임계 삼투 모델에서 밑변이 1이고 높이가 h인 직사각형 $ABCX$영역 윗변 AX에 물을 부으면 물이 밑변 BC에 도달할 수 있을까? 격자의 너비가 0으로 갈 때 이 사건의 확률 극한값을 물리학자 Cardy는 등각장론을 이용하여 예측하였다 ([4]에서 필자는 스미르노프의 논문 지도교수였던 Makarov와 함께 이 확률 극한값을 등각장론의 상관관계함수로 표현하였다.).

이 확률의 극한(Cardy의 공식)은 등각 불변임이 예측되었는데, 스미르노프가 이를 해결하였다. 직사각형 $ABCX$ 대신에 이와 등각동형인 정삼각형 ABC (X는 AC 위에 있음)에서 Cardy의 공식은 매우 간단하게 표현되는데, 2006년도 아벨상을 수상한 Carleson이 처음으로 이를 인지하였다. AB의 길이가 1이고 AX의 길이가 x이면 Cardy의 공식은 x가 된다.



영역의 경계는 정육각형 격자로 둘러싸여 있는데, 왼쪽 경계는 채워져 있고 오른쪽 경계는 비어 있다고 가정하자. 채워진 격자를 색칠하면 다음 그림의 왼쪽과 같다. 빈 격자와 채워진 격자를 분리하는 경계선은 격자의 크기가 0으로 갈 때 수렴하고 그 극한 확률 곡선(다음 그림의 오른쪽)은 등각 불변이며 SLE (6)로 표현됨을 Cardy의 공식을 이용하여 스미르노프가 이끌어 내었다.



등각 불변이고 영역 마코프 성질을 만족하는 확률 곡선을 적절히 매개화하면, 이 곡선 외부에서 정의된 등각 사상 $g(t,z)$의 t에 관한 미분이 $2/(g(t,z)-B(\kappa t))$을 만족하게 할 수 있는데, 이 확률 곡선을 SLE(κ) 곡선이라 부른다 ($B(t)$는 1차원 표준 브라운 운동이다.).

Ising 모델 : 금속의 원자는 초소형 자석처럼 자성을 갖는데, 전자가 원자핵 주위를 돌면서 미세한 자기장을 형성한다. 이를 수학적으로 모형화한 것이 Ising 모델이다. 이 모델에서 원자는 평면 위의 격자점에 놓이게 되는데, N극의 방향(상,하)에 따라 이 격자점에 부호(+,-)가 확률적으로 부여된다.

삼투 모델에서처럼, Ising 모델에서도 상전이가 일어난다. 금속에 열을 가하면 가할수록 원자들은 더 빨리 진동하는데, 어느 임계 온도 이상이 되면 금속은 자성을 잃게 된다. 이 임계 온도에서 격자 크기가 0으로 갈 때 Ising 모델이 척도 극한을 갖고, 이 척도 극한의 등각불변성을 증명한 것이 스미르노프의 주된 업적 중 하나이다.

[참고 문헌]

[1] S. Smirnov, Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 333 (2001), no. 3, 239-244.

[2] S. Smirnov, Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model, Ann. of Math.

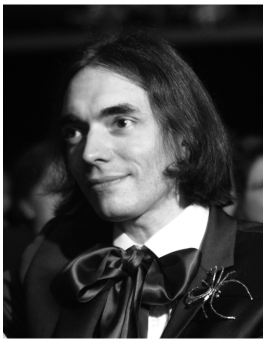
(2), to appear.

[3] G. F. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, *The dimension of the Brownian frontier is 4/3*, Math. Res. Lett. 8 (2001), no. 4, 401-411.

[4] N. Kang and N. Makarov, *Gaussian free field and conformal field theory*, preprint.

서울대학교 수리과학부 강남규

4. Cédric Villani (Inst. Henri Poincaré)



지난 8월 인도 하이데라바드에서 열린 국제수학자대회에서 수리물리학자인 세드릭 빌라니(Cédric Villani) 교수가 영예의 필즈메달을 수상하였다. Julie Rehmeyer가 작성한 ICM 공식 수상업적 소개란에 보면 “For his proofs of nonlinear Landau damping and convergence to equilibrium for the Boltzmann equation”을 주요 수상업적으로 들고 있다. 필자는 아래에 위의 두 가지 업적에 대하여 간략하게 설명하도록 하겠다.

첫 번째 업적은 볼츠만 방정식의 초기치가 균형해인 맥스웰리언에서 멀리 떨어져 있을 때 시간이 지남에 따라 볼츠만 방정식의 해가 맥스웰리언으로 수렴한다는 것에 관한 내용이다. 볼츠만 방정식은 1872년에 오스트리아 수리물리학자 볼츠만에 의해서 가역 시스템인 뉴튼 방정식으로부터 유도된 미분-적분 방정식으로 희박한 기체(예 : 성층권의 대기)의 확률밀도 함수의 동력학을 지배하는 방정식이다. 볼츠만은 물리적 엔트로피의 음수에 해당하는 H-범함수를 이용하여 볼츠만 방정식의 해를 따라서 H-범함수가 감소한다는 것을 보였다. 그런데 Poincaré의 recurrence 정리에 의하면 해밀토니안 시스템은 시간이 지남에 따라 초기 상태 근처로 돌아와야 하는데, 이는 볼츠만의 H-정리에 의하면 볼츠만 H-범함수는 시간에 따라 감소해야 하므로 초기 상태로 돌아올 수 없어서 일견 모순되어 보인다 (Zermelo-Poincare 역설). 이러한 반론에 대하여 볼츠만은 해의 맥스웰리언으로의 수렴시간이, Poincaré 정리에 의해서 초기 상태 근처로 돌아와야 하는 시간보다 짧아서 두 이론사이에는 모순이 존재하지 않는다고 설명하였다. 볼츠만 방정식의 해의 맥스웰리언으로의 수렴성은 엄밀한 증명을 필요로 하는 내용으로 볼츠만 이후로 증명이 안 된 상태로 남아 있었다. 1970년대 일본 수학자인 Ukai 교수가 초기치가 충분히 정칙적이고 맥스웰리언 근처에 가까이 있을 때 해가 맥스웰리언으로 지수적으로 수렴한다는 사실을 최초로 증명하였다. 하지만 그 이후로 초기치가 맥스웰리언상태에서 멀리 떨어져 있는 경우 볼츠만이 예측한대로 엔트로피만으로 해가 균형해로 수렴할 수 있을지에 대해서는 미해결 문제로 남아 있었다. 빌라니 교수는 Laurent Desvillettes 교수와 함께 상대 H-범함수(relative H-functional)의 미분 시 생기는 음의 항을 상대 H-범함수로 통제할 수 있다는 사실을 이용하여 해의 적절한

정칙성 가정하에 해가 맥스웰리언으로 수렴한다는 사실을 엄밀히 증명함으로써 지난 140여 년간 미해결로 남아 있던 문제를 해결하였다.

두 번째 업적으로 플라즈마 물리학의 기본 방정식인 블라소브-포아송 방정식의 비선형 Landau damping에 대한 증명을 들 수 있다. 플라즈마란 이온과 전자, 그리고 전기적으로 중성을 띠는 입자들로 이루어진 제4의 물질의 상태를 지칭하는 것으로, 특별한 경우에 플라즈마의 동력학은 블라소브-포아송 방정식에 의하여 기술된다. 볼츠만 방정식의 경우에는 입자들의 충돌을 지배하는 충돌 작용소의 특별한 구조가 H-범함수를 시간이 지남에 따라 감소하게 하는 비가역성을 설명해주는 반면에 블라소브-포아송 방정식은 볼츠만의 H-범함수가 시간에 따라 변하지 않는 가역시스템이다. 따라서 가역 시스템인 블라소브-포아송 방정식의 초기치가 공간 변수에 의존하지 않는 특별한 균형해 근처에 있을 경우에 시간이 지남에 따라 해가 균형해로 수렴할지는 분명치 않다. 하지만 1946년에 구소련 물리학자인 Lev Davidovich Landau 교수(1962년 노벨 물리학상 수상자)가 블라소브-포아송 방정식을 앞서 말한 균형해로 근사한 선형 시스템의 경우에는 전기장이 시간이 지남에 따라 감소할 수 있다는 사실을 보임으로써 엔트로피가 증가하지 않는 가역시스템에서도 플라즈마가 균형해로 수렴할 수 있다는 사실을 보였는데 이를 Landau damping이라고 한다. 작년에 빌라니 교수는 지도 학생이었던 Clement Mouhot 교수와 공동연구로 비선형 블라소브-포아송 방정식에서도 Landau damping이 성립한다는 사실을 증명하여 지난 55년간 미해결로 남아 있던 문제에 종지부를 찍었다.

앞선 언급한 두 가지 결과 이외에도 빌라니 교수는 Felix Otto 교수와의 공동연구로 기체 운동 방정식의 엔트로피 이론을 Optimal mass transport 이론에 적용하여 이전에 알려져 있던 많은 함수 부등식 등에 새로운 해석과 방법론을 제시하였으며, 기하학자인 John Lott 교수와의 공동연구로 Optimal mass transport 방법을 곡률 이론에 적용하는 등 기하학의 새로운 이론을 전개하였다. 물론 Villani 교수 연구의 모태가 된 기체 운동 방정식에는 아직도 수학자들의 손길을 기다리는 많은 문제들이 남아있다. 끝으로 필자는 빌라니 교수의 필즈 메달 수상을 축하하며, 국내의 젊은 연구자, 대학원생들이 이 분야에 관심을 가질 수 있는 기회가 되기를 고대하며 글을 마치고자 한다.

서울대학교 수리과학부 하승열